evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Předmět:	*Ročník:*	*Vytvořil:*	*Datum:*
MATEMATIKA	***DRUHÝ***	***MGR. JÜTTNEROVÁ***	***7. 6. 2014***
Název zpracovaného celku:			
POVRCHY A OBJEMY KOMOLÝCH TĚLES, KOULE A JEJÍCH ČÁSTÍ			

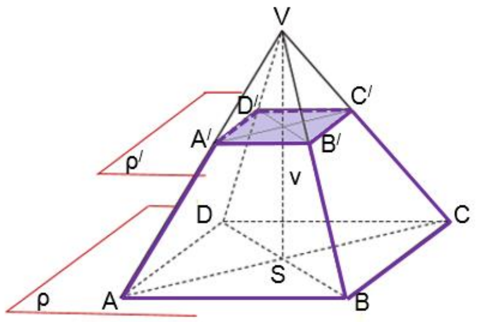
POVRCH A OBJEM KOMOLÉHO JEHLANU

Komolý jehlan:

- má dvě podstavy, které jsou tvořeny mnohoúhelníky (podstavami pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu jsou čtverce)
- boční stěny tvoří lichoběžníky (tzv. plášť tělesa)
- rovina ρ', která je rovnoběžná s rovinou ρ, rozděluje jehlan ABCDV

na dvě tělesa → jehlan $A'B'C'D'V$
→ komolý jehlan $ABCDA'B'C'D'$

pravidelný čtyřboký komolý jehlan



Povrch komolého jehlanu:

$$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$$

Objem komolého jehlanu:

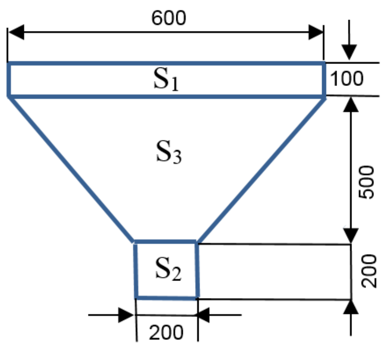
$$V = \frac{1}{3} v \cdot \left(S_{p1} + \sqrt{S_{p1} \cdot S_{p2}} + S_{p2}\right)$$

S_{p1}, S_{p2} … obsahy podstav
S_{pl} … obsah pláště
v … výška komolého jehlanu

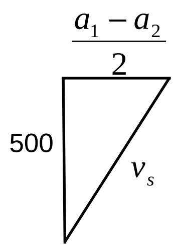
Řešený příklad 1:

Určete, kolik m^2 ocelového plechu se potřebuje ke zhotovení násypníku (viz obr.). Podstavy násypníku jsou čtverce. Berte v úvahu, že při výrobě odpadne 10 % plechu.

Průřez násypníku (údaje jsou vedeny v mm):



Řešení:



$a_1 = 600mm$

$a_2 = 200mm$

$S = 4S_1 + 4S_2 + 4S_3$

$S_1 = 600 \cdot 100 = 60000mm^2$

$S_2 = 200 \cdot 200 = 40000mm^2$

$$S_3 = \frac{600 + 200}{2} \cdot v_s$$

$$\frac{a_1 - a_2}{2} = \frac{600 - 200}{2} = 200mm$$

$$v_s = \sqrt{500^2 + 200^2} = \sqrt{290000} = 100 \cdot \sqrt{29}$$

$$S_3 = \frac{600 + 200}{2} \cdot 100\sqrt{29} = 40000 \cdot \sqrt{29}$$

$S = 4S_1 + 4S_2 + 4S_3$

$S = 4 \cdot 60000 + 4 \cdot 40000 + 4 \cdot 40000 \cdot \sqrt{29}$

$S = 240000 + 160000 + 160000 \cdot \sqrt{29} = 400000 + 160000 \cdot \sqrt{29}$

$S = 1261626{,}369mm^2$

$\underline{S \doteq 1{,}262m^2}$

$10\ \%$ plechu při výrobě odpadne $\Rightarrow$ musíme vypočítat $110\ \%$

$110\ \%$ z S: $1{,}1 \cdot S = 1{,}1 \cdot 1{,}262 \doteq 1{,}4m^2$

Ke zhotovení násypníku je zapotřebí přibližně 1,4 m^2 plechu.

Řešený příklad 2:

Pravidelný čtyřboký komolý jehlan má podstavné hrany o délce 4 m a 1 m. Výška jehlanu je 2 m. Vypočtěte objem jehlanu, který daný komolý jehlan doplňuje na úplný pravidelný čtyřboký jehlan.

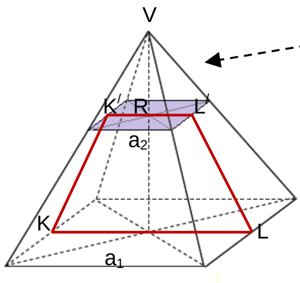
Řešení:

$a_1 = 4m$

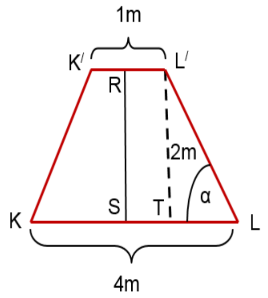
$a_2 = 1m$

$v = 2m$

$\underline{V_1 = ?}$



počítáme objem horního malého jehlanu



$$|TL| = \frac{3}{2} = 1{,}5m$$

$$\Delta TLL' : tg\alpha = \frac{2}{1{,}5}$$

$$\underline{\alpha \doteq 53°8'}$$

$$\Delta RL'V : |RL'| = 0{,}5m$$

$$\alpha \doteq 53°8'$$

$$\underline{|VR| = ?}$$

$$tg\alpha = \frac{|VR|}{|RL'|}$$

$$\frac{2}{1{,}5} = \frac{|VR|}{0{,}5} \Rightarrow |VR| = \frac{2 \cdot 0{,}5}{1{,}5}$$

$$\underline{|VR| = \frac{2}{3}m}$$

Objem pravidelného čtyřbokého jehlanu:

$$V = \frac{1}{3} S_p \cdot v$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot a_2^2 \cdot |VR|$$

$$V = \frac{1}{3} \cdot 1^2 \cdot \frac{2}{3}$$

$$\underline{\underline{V = \frac{2}{9} m^3}}$$

Objem jehlanu, který daný komolý jehlan doplňuje na úplný pravidelný čtyřboký jehlan, je $\frac{2}{9} m^3$.

PRACOVNÍ LIST 1

Příklad 1
Vypočtěte, kolik m^3 uhlí se vejde do násypného koše, který má tvar převráceného komolého jehlanu, je-li strana čtvercového dna 70 cm a strana horního čtvercového otvoru je 16 dm. Hloubka koše je 1,3 m.

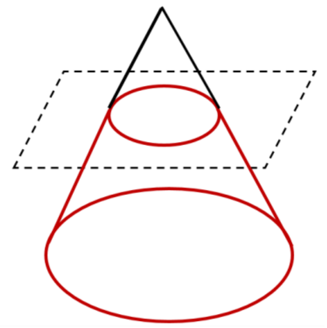
Příklad 2
Jáma má tvar pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu. Hrany podstav mají délku 14 m a 10 m. Boční stěny svírají s menší podstavou úhel o velikosti 135°. Určete, kolik m^3 zeminy bylo vykopáno při hloubení jámy.

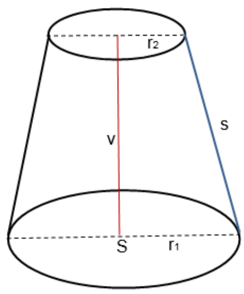
Příklad 3
Betonový podstavec tvaru pravidelného čtyřbokého komolého jehlanu má výšku 12 cm, podstavy hran mají délky 2,4 dm a 1,6 dm. Vypočítejte povrch tohoto podstavce.

POVRCH A OBJEM KOMOLÉHO ROTAČNÍHO KUŽELE

Rovina, která je rovnoběžná s rovinou podstavy, rozděluje rotační kužel na dvě tělesa (viz obr.):

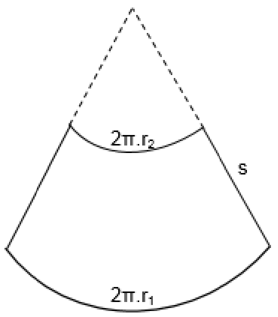
- rotační kužel
- komolý rotační kužel





v – výška kužele
s – strana kužele
r_1, r_2 – poloměry podstav

Plášť rotačního komolého kužele:



$$S_{pl} = \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s$$

Povrch komolého rotačního kužele

$$S = S_{p1} + S_{p2} + S_{pl}$$

$$S = \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot r_2^2 + \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s$$

Objem komolého rotačního kužele

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot v \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$$

Řešený příklad 3:

Objem komolého rotačního kužele je 1504 m^3, výška 12 m a poměr poloměrů podstav 5:2. Vypočtěte poloměry podstav kužele.

Řešení:

$$V = 1504 m^3$$
$$v = 12 m$$
$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{5}{2}$$
$$r_1 = ?$$
$$r_2 = ?$$

$$r_1 = 5x$$
$$r_2 = 2x$$

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot v \cdot \left(r_1^2 + r_1 \cdot r_2 + r_2^2\right)$$
$$1504 = \frac{1}{3}\pi \cdot 12 \cdot \left(25x^2 + 10x^2 + 4x^2\right)$$
$$1504 = 4\pi \cdot 39x^2$$
$$x^2 = \frac{1504}{4\pi \cdot 39}$$
$$x^2 \doteq 3{,}0688$$
$$\underline{x \doteq 1{,}75}$$

$$r_1 = 5x = 5 \cdot 1{,}75$$
$$\underline{\underline{r_1 \doteq 8{,}75 cm}}$$
$$r_2 = 2x = 2 \cdot 1{,}75$$
$$\underline{\underline{r_2 \doteq 3{,}5 cm}}$$

Řešený příklad 4:

Z plechu potřebujeme zhotovit otevřenou nádobu tvaru komolého rotačního kužele, jehož strana je 18 cm. Průměr horní části nádoby má být 30 cm, průměr dna 18 cm. Určete, kolik plechu budeme potřebovat, počítáme-li s odpadem 5 %.

Řešení:

$$s = 18 cm$$
$$d_2 = 30 cm \Rightarrow r_2 = 15 cm$$
$$d_1 = 18 cm \Rightarrow r_1 = 9 cm$$
$$5\%\ odpad$$
$$S = ?$$

$$S = \pi \cdot r_1^2 + \pi \cdot (r_1 + r_2) \cdot s$$
$$S = \pi \cdot 9^2 + \pi \cdot 24 \cdot 18$$
$$\underline{S = 1611{,}637 cm^2}$$

$$1611{,}637 cm^2 \ \ldots\ 100\% \quad \Rightarrow 1\% = 16{,}11637 cm^2$$
$$5\% \doteq 80{,}58 cm^2$$

$$1611{,}637 + 80{,}58 \doteq \underline{\underline{1692{,}2}}$$

Celkem budeme potřebovat 1692,2 cm^2 plechu.

PRACOVNÍ LIST 2

Příklad 4
Objem komolého rotačního kužele je 312 m^3, poloměry podstav měří 81 dm a 34 dm. Vypočtěte jeho výšku.

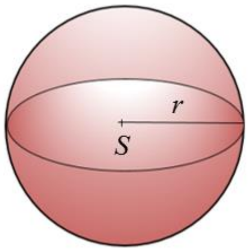
Příklad 5
Určete výšku kužele, je-li jeho povrch 7697 m^2 a průměry podstav jsou 56 m a 42 m.

Příklad 6
Vypočítejte, jakou hmotnost má strojní součást ve tvaru dutého komolého kužele o výšce 6,4 cm, měří-li dolní průměry 6,4 mm a 4 mm a horní průměry 3,4 mm a 2,4 mm.
Hustota použitého materiálu je 8000 kg/m^3.

POVRCH A OBJEM KOULE A JEJÍCH ČÁSTÍ

Koule se středem S a poloměrem r:

- je množina všech bodů v prostoru, jejichž vzdálenost od středu ***S*** je menší nebo rovna poloměru ***r***



Kulová plocha se středem S a poloměrem r:

- je množina všech bodů v prostoru, jejichž vzdálenost od středu ***S*** je rovna poloměru ***r***

Objem koule:

$$\boxed{V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3}$$

Povrch koule:

$$\boxed{S = 4\pi \cdot r^2}$$

Řešený příklad 5:
Vypočítejte objem a povrch Země, jestliže budeme uvažovat, že má tvar koule. Obvod Země je 40 000 km.

Řešení:

$$o = 40000km$$
$$V = ?$$
$$S = ?$$

$$o = 2\pi \cdot r$$
$$r = \frac{o}{2\pi}$$
$$r = \frac{40000}{2\pi}$$
$$r = 6366{,}2km$$

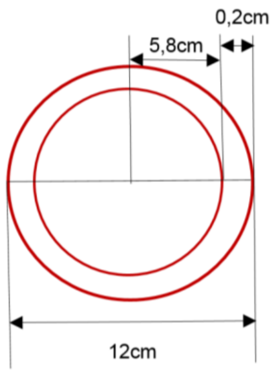
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot r^3$$
$$V = \frac{4}{3}\pi \cdot 6366{,}2^3$$
$$\underline{V = 1{,}08 \cdot 10^{12} km^3}$$

Řešený příklad 6:
Mosazná koule má vnější průměr 12 cm, tloušťka její stěny je 2 mm. Určete hmotnost koule, je-li hustota mosazi 8500 kg/m^3.

Řešení:

$$d_1 = 12cm \Rightarrow r_1 = 6cm$$
$$d_2 = 12cm - 2 \cdot 2mm = 12cm - 4mm = 12cm - 0{,}4cm = 11{,}6cm \Rightarrow r_2 = 5{,}8cm$$
$$\rho = 8500 kg/m^3$$
$$m = ?$$

$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_1^3 \qquad V_2 = \frac{4}{3}\pi \cdot r_2^3$$
$$V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 6^3 \qquad V_1 = \frac{4}{3}\pi \cdot 5{,}8^3$$
$$V_1 = 904{,}78cm^3 \qquad V_1 = 817{,}28cm^3$$



$$V = V_1 - V_2$$
$$V = 904{,}78 - 817{,}28$$
$$\underline{V = 87{,}5cm^3}$$

$$m = \rho \cdot V$$
$$m = 0{,}0085 \cdot 87{,}50$$
$$m = 0{,}74375kg$$
$$\underline{\underline{m = 743{,}8g}}$$

Hmotnost mosazné koule je 743,8 gramů.

PRACOVNÍ LIST 3

Příklad 7
Dutá koule má objem 3432 cm^3. Určete její vnitřní poloměr, je-li tloušťka stěny koule 3 cm.

Příklad 8
Činka je složená ze dvou koulí o průměru 6 cm a příčky tvaru válce o průměru 15 mm a výšce 13 cm. Určete hmotnost činky, je-li zhotovena z materiálu o hustotě 8100 kg/m^3.

Příklad 9
Kouli je vepsána krychle, která má hranu o délce 16 cm. Vypočtěte poloměr koule.

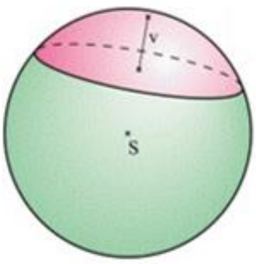
<u>Kulová úseč, kulový vrchlík:</u>

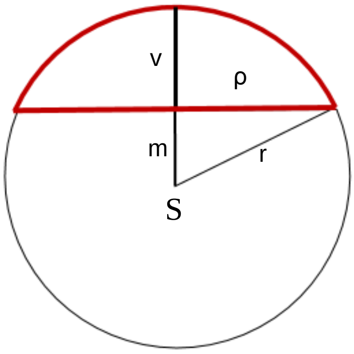
Kulová úseč:

- je průnik koule a poloprostoru
- hraniční rovina tohoto poloprostoru protíná kouli v kruhu o poloměru ρ
- tento kruh je podstavou úseče

Kulový vrchlík:

- je průnik koule a poloprostoru
- hraniční rovina tohoto poloprostoru protíná kulovou plochu v kružnici o poloměru ρ
- na obr. je ***m*** vzdálenost hraniční roviny od středu S





$r = v + m$

$v = r - m$

$\rho = \sqrt{r^2 - m^2}$

Objem kulové úseče:

$$\boxed{V = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot \left(3\rho^2 + v^2\right)}$$

v – výška úseče
ρ – poloměr podstavy úseče

Povrch kulového vrchlíku:

$$\boxed{S = 2\pi \cdot r \cdot v}$$

v – výška vrchlíku
r – poloměr příslušné koule

<u>Řešený příklad 7:</u>
Vypočítejte objem kulové úseče a povrch kulového vrchlíku, je-li $v = 8cm,\ \rho = 6cm.$

Řešení:

$v = 8cm$

$\rho = 6cm$

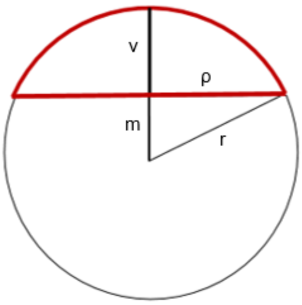
$V = ?$

$\underline{S = ?}$

$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot \left(3\rho^2 + v^2\right)$$

$$V = \frac{\pi \cdot 8}{6} \cdot \left(3 \cdot 6^2 + 8^2\right)$$

$$\underline{\underline{V = 720{,}5cm^3}}$$



$$r^2 = \rho^2 + m^2$$
$$r^2 = 36 + m^2$$
$$r^2 = 36 + (r-8)^2$$
$$r^2 = 36 + r^2 - 16 \cdot r + 64$$
$$16 \cdot r = 100$$
$$\underline{r = 6{,}25cm}$$

$$r = v + m$$
$$m = r - v$$
$$m = r - 8$$

$$S = 2\pi \cdot r \cdot v$$
$$S = 2\pi \cdot 6{,}25 \cdot 8$$
$$\underline{\underline{S = 314{,}2cm^2}}$$

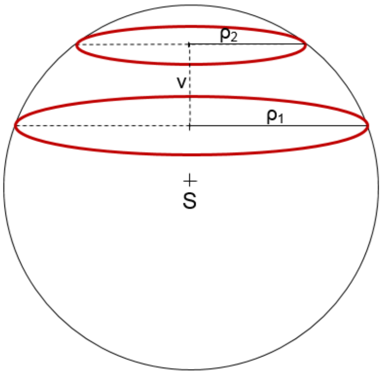
Kulová vrstva, kulový pás:

Kulová vrstva:

- je průnik koule s vrstvou, která je určena dvěma rovnoběžnými rovinami ρ_1, ρ_2
- vzdálenosti těchto rovnoběžných rovin od středu kružnice jsou menší než poloměr kružnice
- vzdálenost těchto rovnoběžných rovin je výška kulové vrstvy … ***v***

Kulový pás:

- je průnik kulové vrstvy s příslušnou kulovou plochou



ρ_1, ρ_2 … poloměry podstav
v … výška kulové vrstvy
r … poloměr příslušné koule

Objem kulové vrstvy:

$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot \left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2\right)$$

Povrch kulového pásu:

$$S = 2\pi \cdot r \cdot v$$

Řešený příklad 8:
Vypočítejte objem kulové vrstvy, jsou-li poloměry podstav 13,2 cm a 10 cm a poloměr koule je 26 cm.

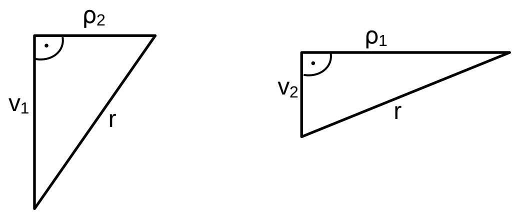
Řešení:

$\rho_1 = 13{,}2cm$

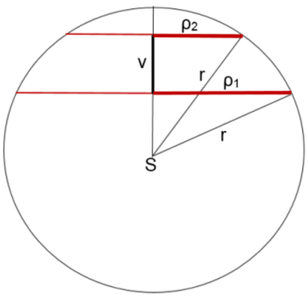
$\rho_2 = 10cm$

$r = 26cm$

$V = ?$



$$v = v_1 - v_2$$



$$v_1 = \sqrt{r^2 - \rho_2^2} \qquad v_2 = \sqrt{r^2 - \rho_1^2} \qquad v = v_1 - v_2$$

$$v_1 = \sqrt{26^2 - 10^2} \qquad v_2 = \sqrt{26^2 - 13{,}2^2} \qquad v = 24 - 22{,}4$$

$$v_1 = 24cm \qquad v_2 = 22{,}4cm \qquad \underline{v = 1{,}6cm}$$

$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot \left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2\right)$$

$$V = \frac{\pi \cdot 1{,}6}{6} \cdot \left(3 \cdot 13{,}2^2 + 3 \cdot 10^2 + 1{,}6^2\right)$$

$$\underline{\underline{V = 691cm^3}}$$

Řešený příklad 9:

Vypočtěte objem kulové vrstvy, která zbude z polokoule po odříznutí úseče o výšce 3 cm. Výška polokoule je 10 cm.

Řešení:

$v' = 3cm$

$r = 10cm$

$\underline{V = ?}$

$v = r - v'$

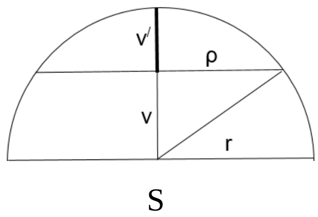
$v = 10 - 3$

$\underline{v = 7cm}$

$\rho^2 = r^2 - v^2$

$\rho = \sqrt{100 - 49}$

$\underline{\rho = \sqrt{51}cm}$



$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot \left(3\rho_1^2 + 3\rho_2^2 + v^2\right)$$

$$V = \frac{\pi \cdot v}{6} \cdot \left(3\rho^2 + 3r^2 + v^2\right)$$

$$V = \frac{\pi \cdot 7}{6} \cdot (3 \cdot 51 + 3 \cdot 100 + 49)$$

$$V = \frac{\pi \cdot 7}{6} \cdot 502$$

$$\underline{\underline{V = 1840cm^3}}$$

PRACOVNÍ LIST 4

Příklad 10

Vypočítejte objem kulové úseče a povrch kulového vrchlíku, je-li $r = 5cm,\ \rho = 4cm.$

Příklad 11

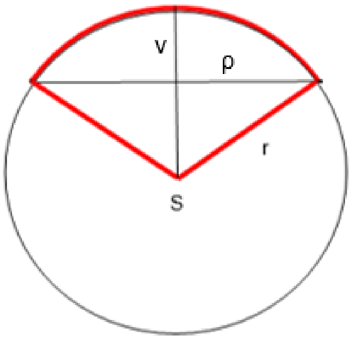
Vypočítejte objem kulové vrstvy, jsou-li poloměry podstav 7 cm a 5 cm a výška vrstvy měří 2 cm.

Příklad 12

Kulová vrstva vznikne z polokoule o poloměru 5 cm odříznutím úseče, jejíž výška je 1,5 cm. Vypočítejte objem této kulové vrstvy.

Kulová výseč:

- je sjednocení všech úseček ***SX***
- ***S*** je střed koule; ***X*** je bod daného kulového vrchlíku o výšce ***v***, jejíž velikost je menší než poloměr koule
- ***r*** je poloměr koule



Objem kulové výseče:

$$V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$$

Povrch kulové výseče:

$$S = 2\pi \cdot r \cdot v + \pi \cdot \rho \cdot r$$

Řešený příklad 10:

Částí koule o poloměru 10 cm je kulová výseč, jejíž osový řez má ve středu koule úhel o velikosti 120°. Vypočítejte povrch a objem výseče.

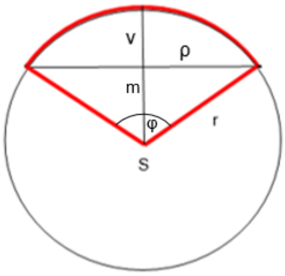
Řešení:

$r = 10cm$

$\varphi = 120°$

$S = ?$

$V = ?$



$m^2 = r^2 - \rho^2$

$m = \sqrt{100 - 75} = \sqrt{25}$

$\underline{m = 5cm}$

$\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{\rho}{r}$

$\sin 60° = \frac{\rho}{10} \quad \Rightarrow \quad \rho = r \cdot \sin 60°$

$\rho = 10 \cdot \sin 60°$

$\underline{\rho = 8{,}66cm}$

$m + v = r$

$5 + v = 10$

$\underline{v = 5cm}$

$S = 2\pi \cdot r \cdot v + \pi \cdot \rho \cdot r$

$S = 2\pi \cdot 10 \cdot 5 + \pi \cdot 8{,}66 \cdot 10$

$\underline{\underline{S = 586{,}2cm^2}}$

$V = \frac{2}{3}\pi \cdot r^2 \cdot v$

$V = \frac{2}{3}\pi \cdot 100 \cdot 5$

$\underline{\underline{V = 1047{,}2cm^3}}$

PRACOVNÍ LIST 5

Příklad 13
Výška kulové výseče je 2 cm, poloměr příslušné koule je 5 cm. Vypočítejte objem kulové výseče.

Příklad 14
Vypočtěte povrch kulové úseče, je-li její objem 141,4 cm^3 a výška měří 3 cm.

Příklad 15
Vypočtěte objem kulové úseče, je-li poloměr její podstavy 10 cm a velikost příslušného středového úhlu je 120°.

Příklad 16
Vypočtěte objem kulové úseče, je-li poloměr příslušné koule 12 cm a velikost příslušného středového úhlu je 90°.

Seznam použité literatury a internetových zdrojů

Výukové materiály a některé úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.
E. POMYKALOVÁ: Matematika pro gymnázia Stereometrie. Prometheus 2006
O. ODVÁRKO, J. ŘEPOVÁ: Matematika pro SOŠ a studijní obory SOU, 3. část. Prometheus 2009
M. HUDCOVÁ, L. KUBIČÍKOVÁ: Sbírka úloh z matematiky pro střední odborné školy, střední odborná učiliště a nástavbové studium. Prometheus 2010
P. ČERMÁK, P. ČERVINKOVÁ: Odmaturuj z matematiky 1. Didaktis 2007
F. JIRÁSEK, K. BRANIŠ, S. HORÁK, M. VACEK: Sbírka úloh z matematiky pro SOŠ a studijní obory SOU 1. část. SPN Praha 1986