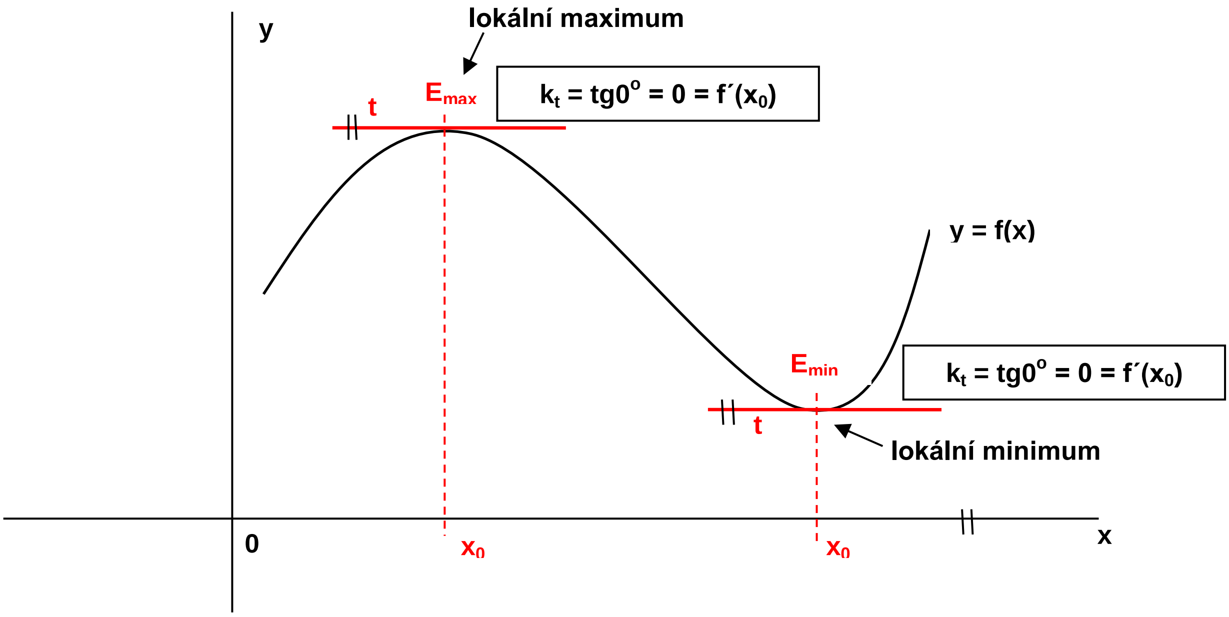
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Předmět:	*Ročník:*	*Vytvořil:*	*Datum:*
MATEMATIKA	***ČTVRTÝ***	***Mgr. Tomáš MAŇÁK***	***25. srpna 2012***
Název zpracovaného celku:			
LOKÁLNÍ EXTRÉMY			

LOKÁLNÍ EXTRÉMY (maximum a minimum funkce)

Lokální extrémy jsou body, v nichž funkce nabývá vzhledem k jejímu okolí největší nebo nejmenší hodnoty. V těchto bodech se funkce mění z rostoucí na klesající či naopak z klesající na rostoucí.

1)



Důležité je nyní to, že v bodech E_{max} a E_{min} lze ke grafu funkce sestrojit tečny (t) rovnoběžné s osou *x*. Směrové úhly těchto tečen jsou nulové $\Longrightarrow$ směrnice těchto tečen jsou také nulové $\Longrightarrow$ první derivace funkce v takovýchto bodech jsou rovněž nulové ($f´(x_0) = 0$).

SHRNUTÍ !!!

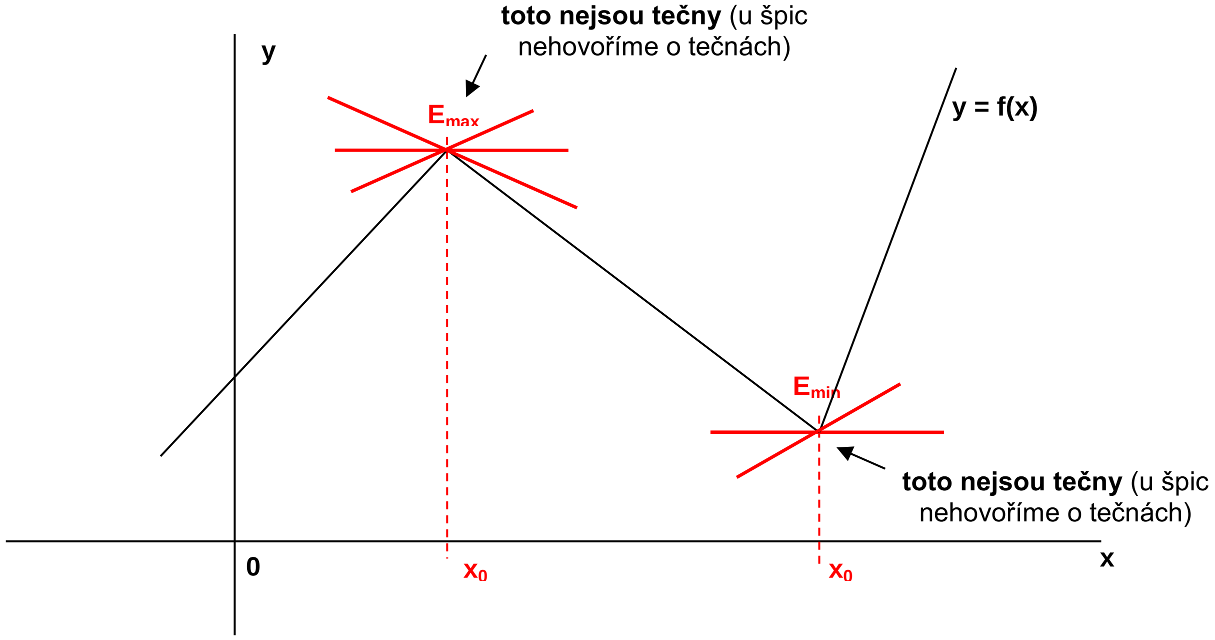
1) $f´(x_0) > 0$ **má v bodě** x_0 **extrém (maximum nebo minimum).**

2) **V bodě** x_0 **derivace funkce** $f´(x_0)$ **mění znaménko (z + na –, nebo z – na +).**

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f´(x_0) = 0}$$

2)



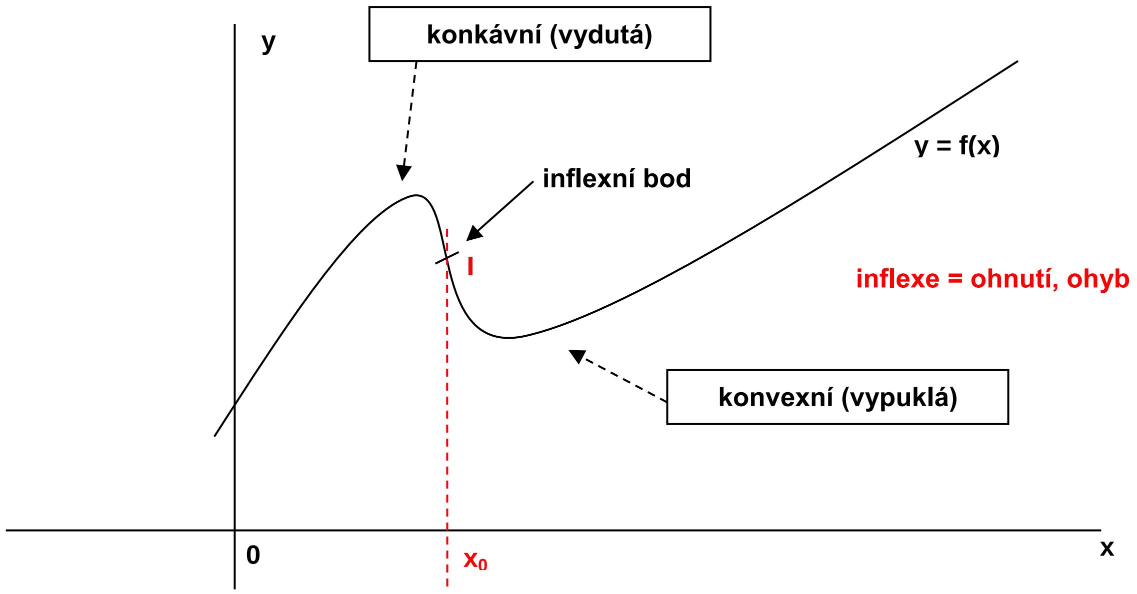
SHRNUTÍ !!!

$f(x)$ **má v bodě** x_0 **extrém (maximum nebo minimum)**.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f'(x_0) - neexistuje}$$

3)



evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

SHRNUTÍ !!!

Inflexní body jsou takové body, ve kterých funkce mění křivost z vyduté na vypuklou, nebo naopak.
Inflexní body určíme pomocí druhé derivace.

1) $f(x)$ **nemá v bodě** x_0 **extrém.**
2) **V bodě** x_0 **derivace funkce** $f'(x_0)$ **nemění znaménko.**

$$\Downarrow$$

$$\boxed{f''(x_0)=0}$$

Závěr:

Funkce může mít lokální extrém jen v bodě x_0 **, v němž je** $f'(x_0)=0$ **nebo v němž derivace neexistuje.**

Derivace v bodě, v němž má funkce extrém mění znaménko; mění-li se znaménko z + (funkce roste) na – (funkce klesá), pak má funkce v tomto bodě lokální maximum; mění-li se znaménko z – (funkce klesá) na + (funkce roste), pak má funkce v tomto bodě lokální minimum.

Inflexní body jsou body, ve kterých funkce mění křivost z vyduté na vypuklou, či naopak.

Nyní si uveďme přehled nejdůležitějších tvrzení:

Je-li $f'(x)>0 \Rightarrow$ **je funkce** $f(x)$ **rostoucí pro daná** x**.**

Je-li $f'(x)>0 \quad \forall x\in(a;b) \Rightarrow$ **je funkce** $f(x)$ **rostoucí** $\forall x\in(a;b)$.

Je-li $f'(x)<0 \Rightarrow$ **je funkce** $f(x)$ **klesající pro daná** x**.**

Je-li $f'(x)<0 \quad \forall x\in(a;b) \Rightarrow$ **je funkce** $f(x)$ **klesající** $\forall x\in(a;b)$.

Je-li $f'(x_0)=0 \ \wedge \ f''(x_0)<0 \Rightarrow$ **má funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0 **lokální maximum.**

Je-li $f'(x_0)=0 \ \wedge \ f''(x_0)>0 \Rightarrow$ **má funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0 **lokální minimum.**

Je-li $f''(x_0)=0 \Rightarrow$ **má funkce** $f(x)$ **v bodě** x_0 **inflexní bod.**

Je-li $f''(x)>0 \quad \forall x\in(a;b) \Rightarrow$ **je funkce** $f(x)$ **ryze konvexní** $\forall x\in(a;b)$.

Je-li $f''(x)<0 \quad \forall x\in(a;b) \Rightarrow$ **je funkce** $f(x)$ **ryze konkávní** $\forall x\in(a;b)$.

Řešené příklady:

<u>Příklad 1</u>

Najděte lokální extrémy funkce $f: \quad y = x^4 - 2x^2$.

<u>Řešení:</u>

1) Určíme definiční obor funkce.

$$D(f) = R$$

2) Vypočteme první derivaci funkce - použijeme základní vzorce pro derivování mnohočlenu.

$$y' = \left(x^4 - 2x^2\right)' = 4x^3 - 2 \cdot 2x = 4x^3 - 4x = 4x(x^2 - 1) = 4x(x-1)(x+1)$$

3) Vypočteme nulové body první derivace (tj. první derivaci položíme rovnu nule). Získáme body, v nichž může mít daná funkce extrém.

$$y' = 0$$
$$4x(x-1)(x+1) = 0$$

$x_1 = 0 \ \vee \ x_2 = 1 \vee \ x_3 = -1$ nulové body (v těchto bodech může být extrém)

Dále můžeme postupovat dvěma různými způsoby:

<u>1. způsob:</u>

4) Určíme, pro která $x \in D(f)$ je $y' > 0$ (funkce roste) a pro která je $y' < 0$ (funkce klesá). Použijeme metody nulových bodů na číselné ose. Určíme intervaly monotónnosti a v podstatě na základě změny znaménka první derivace, zjistíme, zda má funkce v příslušném nulovém bodě extrém.

y':	–		+		–		+	
		- 1		0		1		**10**
funkce:	**klesá**		**roste**		**klesá**		**roste**	
		<u>minimum</u>		**<u>maximum</u>**		**<u>minimum</u>**		

5) Vyslovíme závěr:

Funkce f má lokální minimum v bodech (-1) a 1.

Funkce f má lokální maximum v bodě 0.

2. způsob:

4) Využijeme věty:

Je-li $f'(x_0)=0 \;\wedge\; f''(x_0)<0 \Rightarrow$ má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální maximum.

Je-li $f'(x_0)=0 \;\wedge\; f''(x_0)>0 \Rightarrow$ má funkce $f(x)$ v bodě x_0 lokální minimum.

$$y'=\left(x^4-2x^2\right)'=4x^3-2\cdot 2x=4x^3-4x=4x(x^2-1)=4x(x-1)(x+1)$$

… výsledek první derivace z kroku 2 obecně

$$y''=\left(4x^3-4x\right)'=4\cdot 3x^2-4=12x^2-4$$

... výsledek druhé derivace obecně (získáme jej dalším derivováním vhodného výsledku první derivace)

Vypočteme druhou derivaci v bodech, v nichž může být extrém (v nulových bodech první derivace). Do obecného výsledku druhé derivace dosadíme nulové body první derivace a zjistíme, zda výsledek druhé derivace je kladný nebo záporný. Podle toho pak určíme minimum (kladná druhá derivace) nebo maximum (záporná druhá derivace).

$y''(0)=12\cdot 0^2-4=-4<0 \quad\Rightarrow$ **lokální maximum v bodě** 0

$y''(1)=12\cdot 1^2-4=12-4=8>0 \quad\Rightarrow$ **lokální minimum v bodě** 1

$y''(-1)=12\cdot(-1)^2-4=12\cdot 1-4=12-4=8>0 \Rightarrow$ **lokální minimum v bodě** (-1)

Příklad 2

Určete inflexní body funkce z předchozího příkladu.

Řešení:

1) Původní funkční předpis:

$$f:\quad y=x^4-2x^2$$

2) Výsledek první derivace:

$$y'=\left(x^4-2x^2\right)'=4x^3-2\cdot 2x=4x^3-4x$$

3) Výsledek druhé derivace:

$$y''=\left(4x^3-4x\right)'=4\cdot 3x^2-4=12x^2-4$$

4) Využijeme věty:

Je-li $f''(x_0)=0 \Rightarrow$ má funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod.

$$y'' = 12x^2 - 4 = 0$$
$$12x^2 = 4$$
$$x^2 = \frac{4}{12}$$
$$x^2 = \frac{1}{3}$$
$$|x| = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$ $\Rightarrow$ **funkce má inflexní body pro** $x_{1,2} = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$

Příklad 3

Určete lokální extrémy, intervaly monotónnosti a inflexní body funkce $f: \; y = \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1.$

Řešení:

1) Určíme definiční obor funkce.

$$D(f) = R$$

2) Vypočteme první derivaci funkce - použijeme základní vzorce pro derivování mnohočlenu.

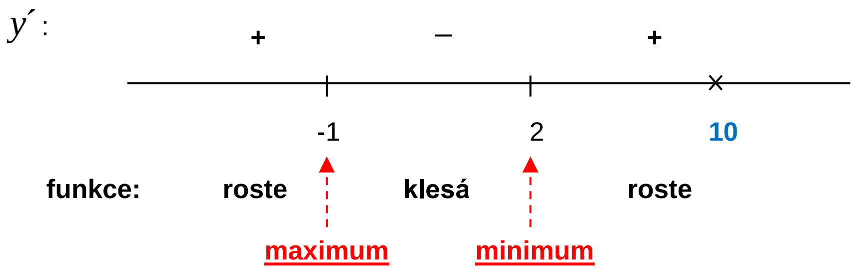
$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 1\right)' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - \frac{1}{2} \cdot 2x - 2 \cdot 1 + 0 = x^2 - x - 2 = (x-2)(x+1)$$

3) Určím nulové body první derivace.

$$y' = 0$$
$$y' = (x-2)(x+1) = 0$$

$x_1 = 2 \vee x_2 = -1$ nulové body (body, v nichž může být extrém)

4) Na číselné ose vyznačíme nulové body první derivace a metodou nulových bodů určíme intervaly monotónnosti funkce.



Funkce f roste pro $x \in (-\infty;-1) \cup (2;\infty)$.
Funkce f klesá pro $x \in (-1;2)$.

5) Vypočteme druhou derivaci funkce (derivováním vhodného obecného výsledku první derivace).

$$y' = x^2 - x - 2$$
$$y'' = (x^2 - x - 2)' = 2x - 1$$

6) Vypočteme druhou derivaci v bodech podezřelých z extrémů (tj. v nulových bodech první derivace).

$$y''(-1) = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3 < 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{lokální maximum v bodě } (-1)$$
$$y''(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3 > 0 \quad \Rightarrow \quad \textbf{lokální minimum v bodě } 2$$

7) Inflexní body funkce určíme pomocí druhé derivace funkce, kterou položíme rovnu nule a rovnici vypočteme.

$$y'' = 2x - 1 = 0$$
$$2x = 1$$
$$x = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \textbf{funkce má inflexní bod pro } x = \frac{1}{2}$$

Příklad 4

Určete lokální extrémy funkce $f: \quad y = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$.

Řešení:

1) Určíme definiční obor funkce.

$$D(f) = R$$

2) Vypočteme první derivaci funkce - použijeme základní vzorce pro derivování mnohočlenu.

$$y' = \left(x^4 - 6x^2 + 8x - 3\right)' = 4x^3 - 6 \cdot 2x + 8 \cdot 1 - 0 = 4x^3 - 12x + 8 = 4(x^3 - 3x + 2)$$

3) Určím nulové body první derivace. Abychom je vypočetli, pokusíme se odhadnout některý kořen trojčlenu $x^3 - 3x + 2$ tj. kořen rovnice $x^3 - 3x + 2 = 0$. Jedním z kořenů rovnice je číslo 1, proto budeme trojčlen $x^3 - 3x + 2$ dělit výrazem $x - 1$. Zopakujeme si tak, jak probíhá dělení mnohočlenu mnohočlenem (učivo 1. ročníku SŠ).

$$(x^3-3x+2):(x-1)=x^2+x-2$$
$$\pm x^3 \mp x^2$$

$$x^2-3x+2$$
$$\pm x^2 \mp x$$

$$-2x+2$$
$$\mp 2x \pm 2$$
----

0 zbytek (dělení beze zbytku)

$\Rightarrow$ lze rozložit trojčlen na součin kořenových činitelů takto

$$\Rightarrow x^3-3x+2=(x-1)(x^2+x-2)=(x-1)(x+2)(x-1)=(x-1)^2(x+2)$$

$\Rightarrow$ výsledek první derivace lze celkově zapsat:

$$y'=\left(x^4-6x^2+8x-3\right)'=4x^3-6\cdot 2x+8\cdot 1-0=4x^3-12x+8=4(x^3-3x+2)=$$
$$=4(x-1)^2(x+2)$$

$$\Rightarrow y'=0$$

$$\Rightarrow y'=4(x-1)^2(x+2)=0$$

$\Rightarrow x_1=1 \vee x_2=-2$ nulové body (body, v nichž může být extrém)

4) Vypočteme druhou derivaci funkce (derivováním vhodného obecného výsledku první derivace).

$$y'=4x^3-12x+8$$
$$y''=(4x^3-12x+8)'=4\cdot 3x^2-12\cdot 1+0=12x^2-12$$

5) Vypočteme druhou derivaci v bodech podezřelých z extrémů (tj. v nulových bodech první derivace).

$$y''=12x^2-12$$

$y''(1)=12\cdot 1^2-12=12-12=0$ $\Rightarrow$ **není extrém v bodě 1 (je tam inflexní bod)**

$y''(-2)=12\cdot(-2)^2-12=12\cdot 4-12=48-12=36>0$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ **lokální minimum pro $x=2$**

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost
INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Příklad 5

Najděte inflexní body funkce $f: \quad y = x^4 - 6x^2 + 8x - 3$ z předchozího příkladu..

Řešení:

Inflexní body funkce určíme pomocí druhé derivace funkce, kterou položíme rovnu nule a rovnici vypočteme. Využijeme již známých výpočtů v předchozím příkladě 4.

$$y'' = 12x^2 - 12 = 0$$
$$12x^2 = 12$$
$$x^2 = 1$$
$$|x| = 1$$
$$x_{1,2} = \pm 1 \qquad \Rightarrow$$

funkce má dva inflexní body, a to pro $x_1 = 1$ **a** $x_2 = -1$

Úlohy k procvičování

1) Určete lokální extrémy a inflexní body funkce $f: \quad y = x^3 + 3x^2 - 9x + 5$.
2) Vyšetřete lokální extrémy a inflexní body funkce $f: \quad y = \dfrac{x^4}{4} + x^3 - 4x + 7$.
3) Určete lokální extrémy funkce $f: \quad y = x^4 - 4x^3 + 4x^2$.
4) Určete lokální extrémy funkce $f: \quad y = 4x^3 - 21x^2 + 18x$.
5) Určete lokální extrémy a inflexní body funkce $f: \quad y = 4x - \dfrac{x^3}{3}$.
6) Určete lokální extrémy funkce $f: \quad y = \dfrac{x^3}{3} - x^2 - 3x$.
7) Určete lokální extrémy funkce $f: \quad y = 1 + 2x^2 - \dfrac{x^4}{4}$.
8) Určete lokální extrémy a inflexní body funkce $f: \quad y = x^3 + \dfrac{x^4}{4}$.

Použitá literatura:

Výukové materiály a úlohy a cvičení jsou autorsky vytvořeny pro učební materiál.
M. Dostálová, D. Pešatová: Matematika 7. část - učební materiály SPŠ Ostrava – Vítkovice
D. Hrubý, J. Kubát: Matematika pro gymnázia - Diferenciální a integrální počet, Prometheus 1997
I. Dušek: Řešené maturitní úlohy z matematiky, SPN 1988